D’après concours ATS Mathématiques 2020

Résolution approchée d’une équation différentielle par la méthode d’Euler

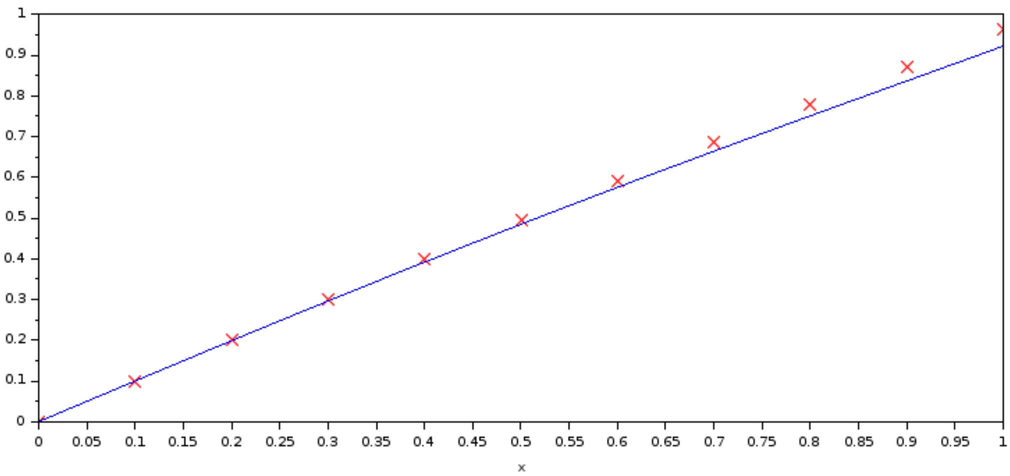
Soit N un entier naturel non nul.
On cherche à résoudre l’équation différentielle $y''(x)+y(x)=x^2$, avec les conditions initiales $y(0)=0$ et $y'(0)=1$ par la méthode d’Euler, en prenant un pas égal à $1/N$.
On admet que cela revient à calculer les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$, $u_1=1/N$ et la relation de récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad N^2(u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n)+u_n=\frac{n^2}{N^2}$$

Autrement dit : $$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n\left(1+\frac{1}{N^2}\right)+\frac{n^2}{N^4}$$

1) Écrire une fonction `cauchy`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel non nul N et renvoie le vecteur $[u_0,u_1,\dots,u_N]$.

Sur la figure suivante, on représente le graphe de la solution théorique de l’équation différentielle sur l’intervalle [0, 1], ainsi que les points de coordonnées $(k/N,u_k)$ avec $k\in\{0,1,\dots,N\}$ (ici, on a choisi N = *10*).



2) Comment agir sur le paramètre N pour améliorer la solution approchée ? Quel est l’impact sur le temps de calcul ?