D’après concours ATS Mathématiques 2021

On considère la fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!^2}$

La somme des premiers termes donne :

$$f(x)=1-x^2+\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{36}+\frac{x^8}{576}-\ldots$$

Pour tout réel a, l’unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p-1 < a \leq p$ est appelé la ***partie entière supérieure*** de a, et on le note $\lceil a \rceil$.
De manière équivalente, $\lceil a \rceil$ est le plus petit entier qui soit supérieur ou égal à a.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On note $n_x=\lceil |x|-1 \rceil$.

On admet le résultat suivant :

$$\left| f(x)-\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!^2} \right| \leq \frac{x^{2(N+1)}}{(N+1)!^2} \quad \text{pour tout entier } N \geq n_x$$

Note : $\frac{x^{2(N+1)}}{(N+1)!^2}$ est le terme de rang N+1 (en valeur absolue).

La fonction `fapprox` ci-dessous prend en entrée un réel x non nul, un réel strictement positif ε, et renvoie une approximation de $f(x)$ à ε près, c’est-à-dire un réel y tel que $|f(x)-y| \leq \varepsilon$.
Recopier la fonction `fapprox` (en version *Scilab* ou bien pseudo-code) et la compléter.
Note : les fonctions « valeur absolue » et « partie entière supérieure » s’écrivent respectivement `abs` *et* `ceil` *en Scilab.*

```
function y = fapprox(x, eps)
  nx = ceil(abs(x)-1)
  y = 0
  t = ...
  n = ...
  while ...       | ...
    y = y + t
    n = n + 1
    t = -t * x^2 / n^2
  end
endfunction
```

fonction FAPPROX(x, ε)
  $n_x \leftarrow \lceil |x|-1 \rceil$
  y ← 0
  t ← …
  n ← …
  tant que … ou …
    y ← y + t
    n ← n + 1
    t ← $-tx^2/n^2$
  fin tant que
  renvoyer y
fin fonction